

رابطه‌های ساده، شکل‌های بامزه



بهزاد اسلامی مسلّم

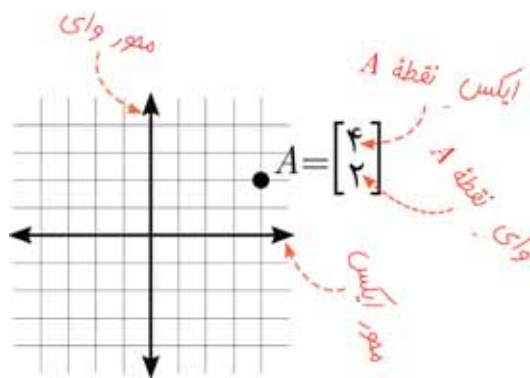
کلیدواژه‌ها: دستگاه مختصات، معادلهٔ خم‌ها، معادلهٔ خط راست

ایکس؟ وای؟

ده نقطه در دستگاه مختصات رسم می‌کنیم که هر یک شرط زیر را داشته باشند:
شرط: وای نقطه دو برابر ایکس نقطه است.
این نقطه‌ها در کنار هم، شبیه چه شکلی می‌شوند؟

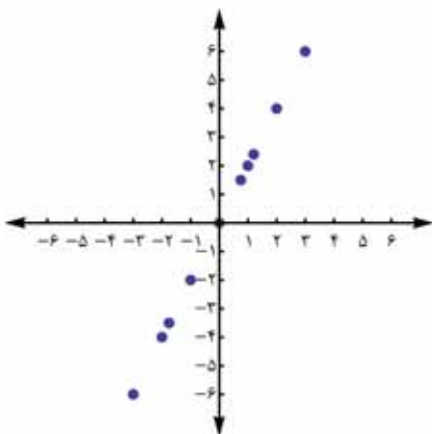
حتماً با دستگاه مختصات و روش نوشتن مختصات نقاط آشنا باشید. اما شاید ندانید که کلمات «محور ایکس» و «محور وای» و «ایکس نقطه» و «وای نقطه» به چه معناست. این‌ها را در شکل زیر به راحتی می‌توانید یاد بگیرید. نگاه کنید:

بیا باید چند نقطه که شرط را داشته باشند پیدا کنیم و بعد آن‌ها را در دستگاه مختصات رسم کنیم.
مثلاً در نقطه $\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$ ، ایکس برابر است با ۳ و وای برابر است با ۶. پس وای دو برابر ایکس است. دیگر چه نقطه‌هایی؟ مثلاً این نقطه‌ها:

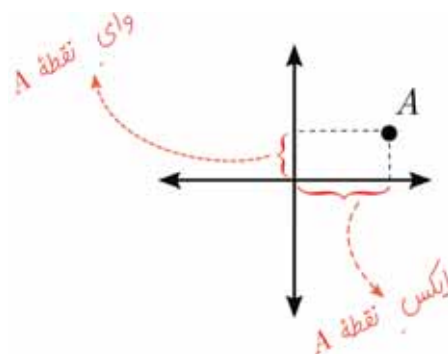


$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0,75 \\ 1,5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1,2 \\ 2,4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1,75 \\ -3,5 \end{bmatrix}$$

حالا بیا باید همهٔ این ده نقطه را در یک دستگاه مختصات رسم کنیم:

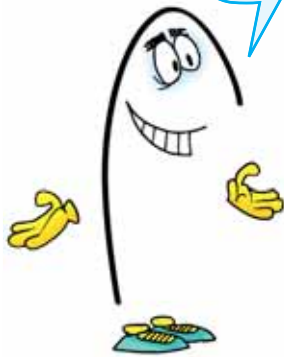


پس محور ایکس همان محور افقی است و محور وای همان محور عمودی است. در این یکی شکل هم می‌توانید معنای ایکس و وای نقطه را ببینید:



حالا می‌رویم سراغ بحث اصلی. این مسئله را ببینید:

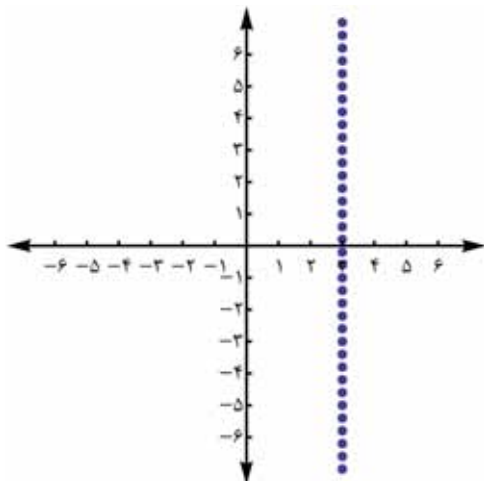
در این مسئله، شرط این بود که
 «وای نقطه»
 دوبرابر ایکس نقطه است.» بیایید
 ببینیم اگر شرط‌های دیگری انتخاب
 کنیم، به چه شکل‌هایی ممکن
 است برسیم.



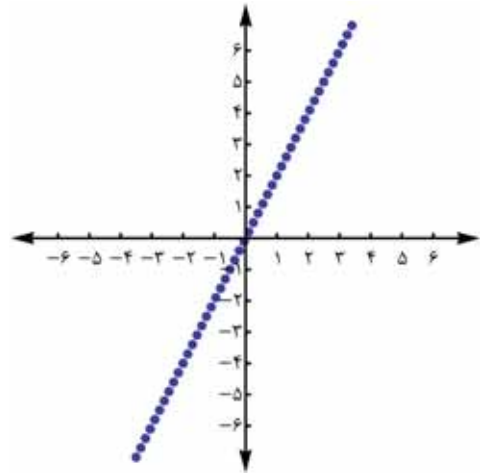
مسئله‌ها

۱. سی‌وپنج نقطه که هر یک شرط زیر را دارند، در دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:
 شرط: ایکس نقطه برابر ۳ است.
 این نقطه‌ها در کنار هم، شبیه چه شکلی می‌شوند؟

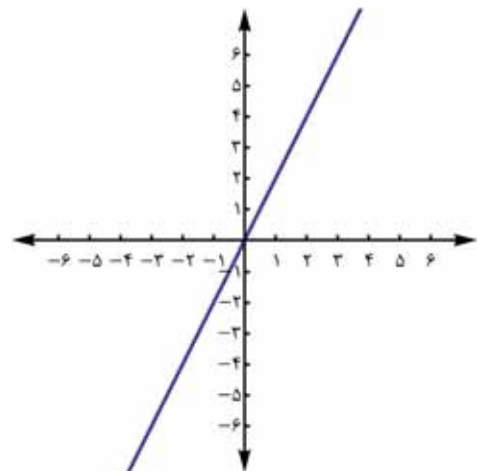
شرط را این طور هم می‌توانیم بنویسیم: $X = 3$.
 ببینیم چه شکلی تشکیل می‌شود.



انگار این نقطه‌ها روی یک خط قرار دارند. بگذارید تعداد نقطه‌ها را بیشتر کنیم. با استفاده از رایانه، نزدیک به ۵۰ تا نقطه پیدا می‌کنیم با همین شرط که «وای نقطه، دوبرابر ایکس نقطه باشد.» دیگر مختصات نقاط را نمی‌نویسیم. فقط آن‌ها را در دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:



هرچه تعداد نقطه‌ها را بیشتر کنیم، شکل بیشتر شبیه خط می‌شود. در حقیقت، اگر می‌توانستیم همه نقاطی را که «وای هر یک از آن‌ها، دوبرابر ایکس اش است» رسم کنیم، دقیقاً به خط می‌رسیدیم!

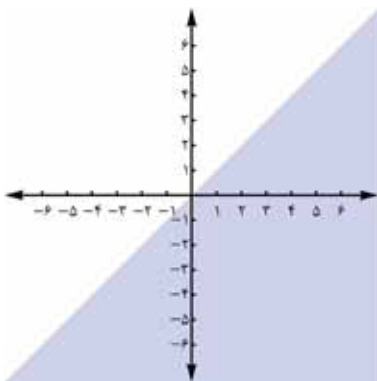


توجه کنید که این خط از دو طرف ادامه دارد. فقط قسمتی از آن را رسم کرده‌ایم، زیرا نمی‌توانیم آن را کامل رسم کنیم. راستی، می‌توانیم شرط «وای نقطه، دو برابر ایکس نقطه است» را به این صورت بنویسیم: $y = 2x$.

۲. همهٔ نقطه‌هایی را که این شرط را دارند، در دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:

شرط: **ایکس نقطه از وای آن بیشتر است.**
این نقطه‌ها در کنار هم، چه شکلی را تشکیل می‌دهند؟

شرط را این‌طور هم می‌توانیم بنویسیم: $X > Y$.
 عجیب است! این بار دیگر به خط نمی‌رسیم، بلکه سطحی تشکیل می‌شود:



البته این شکل از سمت راست و پایین ادامه دارد و فقط بخشی از آن را رسم کرده‌ایم.



راستی! آیا می‌توانیم شرطی بگذاریم که نقاط، دایره تشکیل بدهند؟ بله! مسئله بعد را بخوانید.

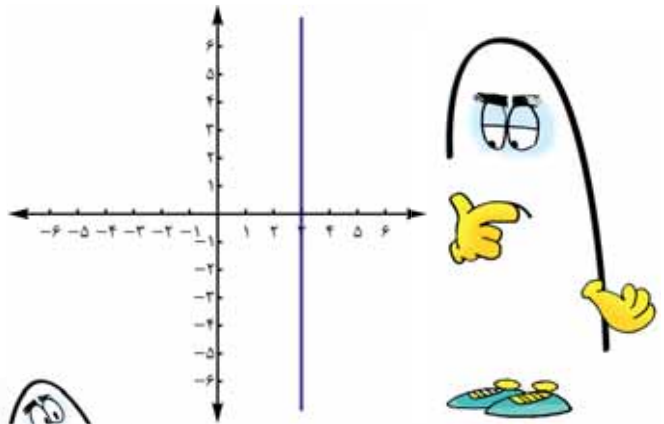
۳. همهٔ نقطه‌هایی که این شرط را دارند، در دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:

شرط: **(ایکس × ایکس) + (وای × وای) = ۲۵**
این نقطه‌ها در کنار هم، چه شکلی را تشکیل می‌دهند؟

شرط را این‌طور هم می‌توانیم بنویسیم:
 $x^2 + y^2 = 25$

باز هم ابتدا چندتا از نقاط را پیدا می‌کنیم. (چطور این کار را می‌کنیم؟ برای این کار روشی جود دارد که سخت هم نیست. اما

اگر می‌توانستیم همهٔ نقاطی با شرط را رسم کنیم، باز هم به خط می‌رسیدیم. البته این بار، خطی عمودی:



که این‌طور... لاید هر شرطی که انتخاب کنیم و نقطه‌ها را رسم کنیم، به خط می‌رسیم. درست است؟
 نه! مسئله بعد را ببینید.

شوخی بادکارت



در اینجا کاری به آن روش نداریم.)

۴. همهٔ نقطه‌هایی را که این شرط را دارند، در دستگاه

مختصات رسم می‌کنیم:

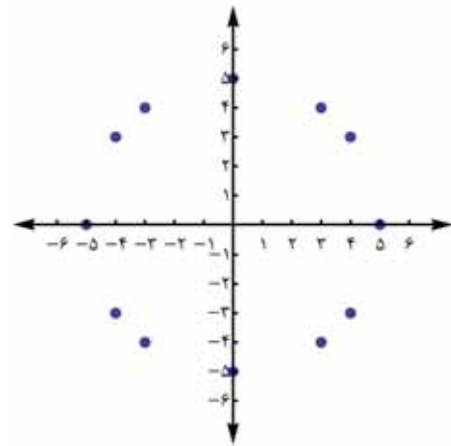
شرط: (وای × وای) + ایکس = ایکس × ایکس × ایکس!

این نقطه‌ها در کنار هم چه شکلی را تشکیل می‌دهند؟

$$\begin{bmatrix} -4 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

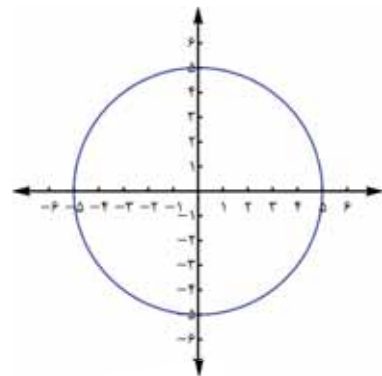
$$\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

نگاه کنید:



و اگر همهٔ نقاط را می‌توانستیم رسم کنیم، به این شکل

می‌رسیدیم:



چه جالب! دایره‌ای به شعاع ۵!

می‌ترسم بعضی شرط‌ها،

شکل‌های عجیب‌تر هم ایجاد کنند!

مثلاً شکلی که از دو تکه جدا از هم

درست شده باشد!

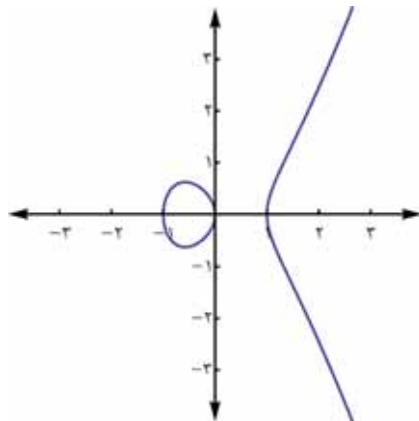
راستی؛ مثل این که خود تو هم

یکی از همان شکل‌ها هستی!

شرطِ نقاط تو چیست؟

شرطِ نقاط تو چیست؟

شرطِ نقاط تو چیست؟



شرط را این‌طور هم می‌توانیم بنویسیم:

$$y^2 + x = x^2$$

این بار شکل خیلی عجیب‌تر است! برخلاف قبل، حتی یک‌تکه

هم نیست!

روزی،
ریاضی‌دان‌ها رابطهٔ بین شکل‌ها و
شرط‌ها را کشف کردند؛ مانند همین
چیزی که در این مقاله خواندید.
این کشف، از مهم‌ترین اتفاقات
تاریخ ریاضی است و باعث
پیشرفت‌های مهمی در ریاضی شد.

